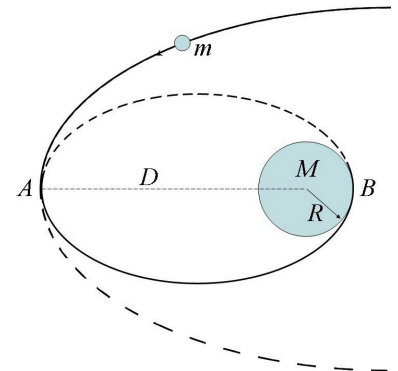
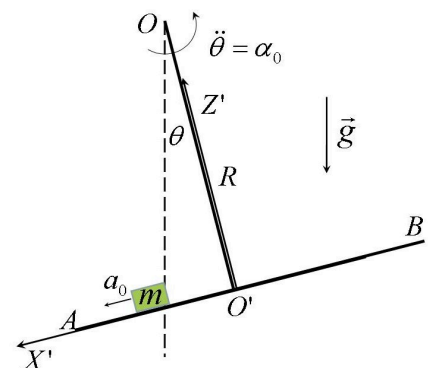


P.1 Un transbordador espacial de masa m se aproxima a la Tierra en una trayectoria parabólica, debida exclusivamente a la atracción gravitacional terrestre. Cuando la nave se encuentra en el punto A está en su perigeo, a una distancia D del centro de la Tierra. En esta posición la nave frena en forma brusca y breve, disminuyendo únicamente la magnitud de su velocidad. Como consecuencia, el transbordador pasa a una órbita elíptica que le permite pasar tangencialmente sobre la superficie terrestre en B .

Determine la pérdida de energía cinética que el transbordador sufre en el punto A en el movimiento descrito. Son datos: G , M , R , D y m .



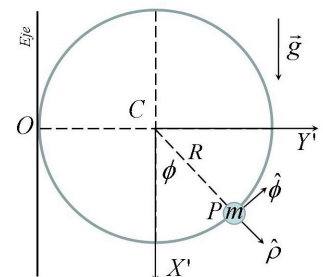
P.2 Una plataforma AB es forzada a girar con aceleración angular constante $\ddot{\theta} = \alpha_0$ en torno a un eje horizontal que pasa por el punto O ubicado a una distancia $OO' = R$ de la plataforma. Sobre la plataforma se mueve una partícula P de masa m , que cuenta con un pequeño motor que le entrega una fuerza paralela a la plataforma, de magnitud $F(t)$, la cual se controla de tal manera que P se desplace con aceleración constante a_0 con respecto a la plataforma. En la condición inicial: $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $x' = 0$ y $\dot{x}' = 0$.



- Determine $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $x'(t)$ y $\dot{x}'(t)$.
 - Determine las pseudofuerzas que actúan sobre P en el sistema de referencia con origen en O' y ejes X' y Z' de la figura.
 - Si $a_0 = \frac{2}{5}R\alpha_0$, determine la distancia d a la que está la partícula desde O' cuando ésta se separa de la plataforma.
 - Si el motor actuase en el sentido opuesto, es decir, $a_0 = -\frac{2}{5}R\alpha_0$, señale si P se separaría de la plataforma a una distancia desde O' mayor, menor o igual a d . Justifique claramente su respuesta.
- Nota: Considere que la plataforma AB es tan larga como sea necesario.

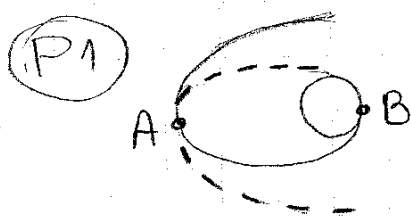
P.3 Un aro de radio R gira en torno a un eje vertical, tangente al aro en el punto O , con velocidad angular Ω constante. Una partícula P de masa m puede moverse sin roce a lo largo del aro. por el riel. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro, y con ejes X' e Y' en el plano del aro, como indica la figura. Sabiendo que la ecuación de movimiento genérica en un sistema no inercial es:

$$m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^{rel}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^{rel}$$



- Escriba la ecuación del movimiento de P referida al sistema no inercial indicado, expresando la proyección en la dirección $\hat{\phi}$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$.
- Obtenga la expresión para U tal que $f = \frac{1}{R} \frac{dU}{d\phi}$.
- Suponiendo que $R\Omega^2 \ll g$ y que el ángulo de equilibrio es cercano a cero, determine en forma aproximada este ángulo de equilibrio.

Solución:

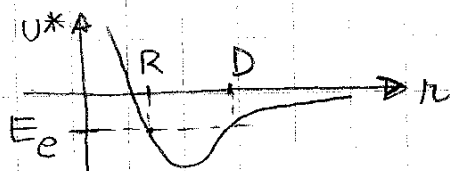


La pérdida de Energía Cinética en A es la pérdida de EMT, ya que la Energía Potencial en A es la misma para ambas órbitas.

La EMT de la órbita parabólica (E_p) es cero, ya que es la órbita abierta con menor energía. Es decir debe ser capaz de llevar al transbordador a $r \rightarrow \infty$, tal que llegue con $v=0$ ($\Rightarrow EMT=0$)

La EMT de la órbita elíptica (E_e) la podemos obtener como sigue

$$EMT = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{h^2}{r^2} - GMm/r}_{U^*(r)}$$



En A y en B el valor de \dot{r} es cero \Rightarrow en estos puntos $EMT = U^*(r)$

$$\Rightarrow E_e = U^*(r=D) = U^*(r=R)$$

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} m \left(\frac{h^2}{D^2} \right) - GMm/D \quad / \cdot D^2 \Rightarrow E_e \cdot D^2 = \frac{1}{2} m h^2 - GMm D \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{h^2}{R^2} \right) - GMm/R \quad / \cdot R^2 \Rightarrow E_e \cdot R^2 = \frac{1}{2} m h^2 - GMm R \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow E_e (D^2 - R^2) = -GMm(D - R)$$

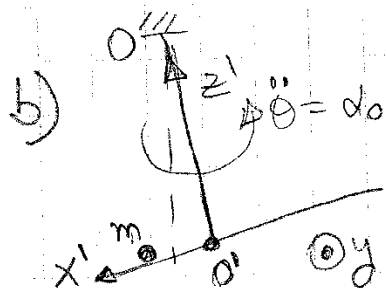
$$\Rightarrow E_e = -\frac{GMm}{D+R}$$

$$\therefore \Delta EMT = E_e - E_p = E_e - 0 = -\frac{GMm}{D+R} = \Delta K$$

P2

a) Por enunciado:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} &= \alpha_0 \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \\ \theta(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \alpha_0 t \\ \theta(t) &= \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \ddot{x}' &= a_0 \\ \dot{x}'(0) &= 0 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}'(t) &= a_0 t \\ x'(t) &= \frac{1}{2} a_0 t^2 \end{aligned}$$



La aceleración del origen del SRNI es: $\vec{a}_0 = R \ddot{\theta} (-\hat{i}') + R \dot{\theta}^2 (\hat{k}')$

Velocidad angular del SRNI: $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{j}'$
ac. angular del SRNI: $\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta} \hat{j}'$

⇒ Las pseudo fuerzas son:

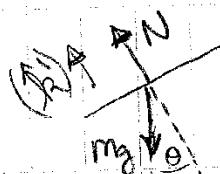
$$-m \vec{a}_0 = m R \alpha_0 \hat{i}' + m R (\alpha_0 t)^2 (-\hat{k}')$$

$$-m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{rel}) = -m \dot{\theta} (\hat{j}') \times (\dot{\theta} (\hat{j}') \times x' (\hat{i}')) = -m \dot{\theta}^2 x' \frac{(\hat{j}') \times (\hat{k}')}{(-\hat{i}')} \\ \text{(centrifuga)} = m (\alpha_0 t)^2 \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \right) (\hat{i}')$$

$$-2m \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = -2m \dot{\theta} (\hat{j}') \times (\dot{x}' (\hat{i}')) = 2m \dot{\theta} \dot{x}' (\hat{k}') = 2m (\alpha_0 t) (a_0 t) (\hat{k}') \\ \text{(Coriolis)}$$

$$-m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{rel} = -m \ddot{\theta} (\hat{j}') \times (x' (\hat{i}')) = m \ddot{\theta} x' (\hat{k}') = m \alpha_0 \cdot \frac{1}{2} a_0 t^2 (\hat{k}') \\ \text{(transversal)}$$

$$c) \vec{a}_{rel} = \ddot{x}' (\hat{i}') + \underbrace{\ddot{y}' (\hat{j}')}_0 + \underbrace{\ddot{z}' (\hat{k}')}_0$$



$$\text{Según } (\hat{k}') \Rightarrow 0 = N - mg \cos \theta - m R (\alpha_0 t)^2 + 2m \alpha_0 a_0 t^2 + \frac{1}{2} m \alpha_0 a_0 t^2$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta + m R (\alpha_0 t)^2 - \frac{5}{2} m \alpha_0 a_0 t^2$$

$$\text{Si } a_0 = \frac{2}{5} \alpha_0 \Rightarrow N = mg \cos \theta + m R \alpha_0^2 t^2 - \frac{5}{2} \alpha_0 \cdot \frac{2}{5} \alpha_0 t^2$$

$$N = mg \cos \theta$$

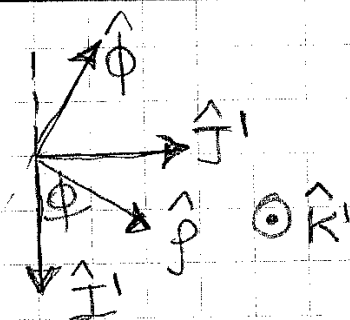
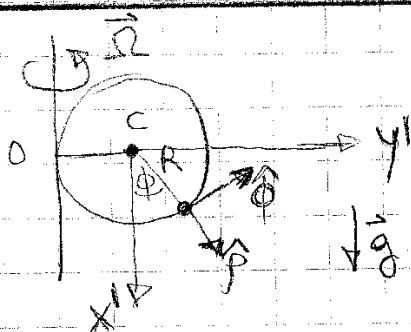
$$\text{Despegue} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 = \frac{1}{2} \alpha_0 t_D^2 \quad (t_D = \text{tiempo de despegue})$$

$$\Rightarrow t_D^2 = \pi / \alpha_0 \Rightarrow x_D = x'(t_D) = \frac{1}{2} a_0 \pi / \alpha_0$$

P2 (cont)

- d) Si la aceleración relativa de la partícula apuntara según $(-\hat{i}')$ \Rightarrow cambia el signo de $\vec{v}^{rel}(\dot{\vec{x}}')$ y de $\vec{r}^{rel}(\vec{x}')$ con esto, cambia el signo de la fuerza de Coriolis y de la fuerza transversal, apareciendo ahora según $(-\hat{k})$ lo que dificulta la pérdida de contacto.
 \Rightarrow En este caso la distancia de pérdida de contacto es mayor que el X'_D calculado en (c)

P3



$$a) \boxed{m \vec{a}^{rel} = \vec{F} - m \vec{a}_c + \vec{F}_{cent} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{tr}}$$

$$\bullet m \vec{a}^{rel} = m (R \dot{\phi}^2 (-\hat{j}) + R \ddot{\phi} (\hat{\phi}))$$

$$\bullet \vec{F} = mg(\hat{i}) + N_p(-\hat{j}) + N_z(-\hat{k})$$

$$mg(\hat{i}) = mg \cos \phi \hat{j} + mg \sin \phi (-\hat{\phi})$$

$$\bullet -m \vec{a}_c = m R \Omega^2 (\hat{j}')$$

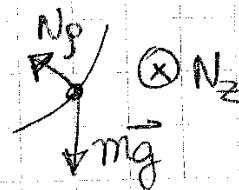
$$\bullet \vec{F}_{cent} = -m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times R(\hat{j})) = -m \Omega (-\hat{i}') \times (\Omega R (-\hat{i}') \times (\hat{j}))$$

$$= m \Omega^2 R \sin \phi (\hat{j}')$$

$$= m \Omega^2 R \sin \phi (\sin \phi (\hat{j}) + \cos \phi (\hat{\phi}))$$

$$\bullet \vec{F}_{cor} = -2m \Omega (\hat{i}') \times (R \dot{\phi} (\hat{\phi})) = -2m \Omega R \dot{\phi} (\hat{i}') \times (\hat{\phi})$$

$$= 2m \Omega R \dot{\phi} \cos \phi (\hat{k}')$$



P3(cont) La ecuación del movimiento en el SRNI según la dirección $\hat{\phi}$ es:

$$mR\ddot{\phi} = -mg \sin \phi + mR\Omega^2 \cos \phi + mR\Omega^2 \sin \phi \cos \phi = f$$

b) $f = \frac{1}{R} \frac{dU}{d\phi} \Rightarrow U = R \int f(\phi) d\phi + \text{cte}$

$$U(\phi) = -mgR \cos \phi - mR^2\Omega^2 \sin \phi - mR^2\Omega^2 \frac{\sin \phi}{2} + \text{cte}$$

elegimos $\text{cte} = 0$

c) Equilibrio $\Rightarrow \left(\frac{dU}{d\phi} \right)_{\phi_{eq}} = 0 \Leftrightarrow f(\phi_{eq}) = 0$

$$\Rightarrow -g \sin \phi_{eq} = R\Omega^2 \cos \phi_{eq} (1 + \sin \phi_{eq}) \Rightarrow 1 + \sin \phi_{eq} = \frac{g}{R\Omega^2} \tan \phi_{eq}$$

Si $\phi_{eq} \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin \phi_{eq} \approx \phi_{eq} \\ \tan \phi_{eq} \approx \phi_{eq} \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 + \phi_{eq} \approx \frac{g}{R\Omega^2} \phi_{eq} \Rightarrow 1 \approx \underbrace{\left(\frac{g}{R\Omega^2} - 1 \right)}_{\gg 1} \phi_{eq}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{eq} \approx \frac{R\Omega^2}{g}}$$